Örnek. Varsayalım bir makine $t = 0$ anında çalışmaya başlıyor ve bu makine $t_1 = \xi_1$ anında bozuluyor. Bu makinenin yerine aynı tip bir makine konulur $t_2 = \xi_1 + \xi_2$ anında yine bozulur ve yerine yenisiyle değiştirilir. Varsayalım $\xi_1,\ \xi_2,\ \dots$ ler bağımsızdır ve her birisi aynı dağılıma sahiptir. $P(\xi_k < t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Makinanın değiştirilme masrafı şu şekilde gösterilir.

$$\beta e^{-\alpha t_1}, \beta e^{-\alpha t_2}, \dots, \beta e^{-\alpha t_n}, \quad n = 1, 2, \dots \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Masrafların toplamı $c = \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha t_n}$ olduğuna göre $E(c) = ?$

Çözüm. $E(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta E(e^{-\alpha t_n})$

Herhangi bir ξ tesadüfi değişkeninin Laplace dönüşümü,

$$L_\xi(s) = E\left(e^{-s\xi}\right) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx.$$

Bu bağlamda

$$E(e^{-\alpha t_n}) = E(e^{-\alpha(t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1})})$$

$$= E(e^{-\alpha t_1})E(e^{-\alpha(t_2 - t_1)}) \dots E(e^{-\alpha(t_n - t_{n-1})})$$

ξ_i ler aynı dağılıma sahip ve bağımsız olduklarından

$$E(e^{-\alpha t_n}) = \left[E(e^{-\alpha \xi_i}\right]^n$$

$$E\left(e^{-\alpha \xi_i}\right) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}$$

$$E(c) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{-\alpha t_n}) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\lambda + \alpha})^n = \beta \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Veya aşağıdaki gibi bulunur.

$E(c) = E[\sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha t_n}]$. (özellik 7 'den dolayı)

$$= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha t_n} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} dx = \beta \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Örnek. Müşterilerin bir mağazaya gelişlerinin ortalama oranı (geliş parametresi) $\lambda = 20$ olan Poisson sürecine uyuyor ve bir müşterinin alış veriş yapması olasılığı %20 dir.

a) 20 saatte yapılan satışların beklenen sayısını bulunuz.
b) İki satış arasında geçen sürenin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) 9. satışın 8. saatte yapıldığı bilindiğine göre 7. Satışın 5. saatte yapılması olasılığını bulunuz.

Çözüm. $\boldsymbol{X_t}$, Mağazaya t süresinde gelenlerin sayısı, $\boldsymbol{N_t}$ t süresinde alış veriş yapanların sayısı.

a) $E(X_t) = \lambda t$ ve $E(N_t) = \lambda p t = 20. \%20. 20 = 80$
b) Gelişler Poisson ise gelişler arası süre üstel dağılır.

$$f_{N_t}(x) = \begin{cases} \lambda p e^{-\lambda p x}, & x \geq 0 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$f_{N_t}(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$F_{N_t}(x) = \begin{cases} 1, & x \to \infty \\ 1 - e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

c) $P(N_5 = 7/N_8 = 9) = \frac{P(N_5 = 7)P(N_3 = 2)}{P(N_8 = 9)} = 0.188$.

Örnek. $\{ X_t,\ t \geq 0 \}$ λ parametreli Poisson süreci olsun ve $t_{n-1},\ t_n$ iki ardışık geliş anı olmak üzere ilişki katsayısı $\rho(t_{n-1},\ t_n)$' i bulunuz.

Çözüm.

$$\rho(t_{n-1}, t_n) = \frac{Cov(t_{n-1},\ t_n)}{\sqrt{V(t_{n-1})V(t_n)}}$$

t_n , gamma dağıldığından

$$V(t_{n-1}) = \frac{n-1}{\lambda^2}, \qquad V(t_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

$$Cov(t_{n-1},\ t_n) = E(t_{n-1}\ t_n) - E(t_{n-1})\,E(t_n)$$

$$V(t_n - t_{n-1}) = V(t_n) + V(t_{n-1}) - 2Cov(t_{n-1},\ t_n) \qquad (*)$$

$$E(t_{n-1}) = \frac{n-1}{\lambda}, \qquad E(t_n) = \frac{n}{\lambda}.$$

$t_k - t_{k-1} = T_k$, $k = 1,2, \dots, n$ için

Alındğında (*) eşitliğinin sol tarafı Poisson sürecinin 2. özelliğinden

$$V(t_n - t_{n-1}) = \frac{1}{\lambda^2}$$

olur, bulunan bu ifadeler (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Cov(t_{n-1}, t_n) = \frac{n-1}{\lambda^2}$$

olur.

$$\rho(t_{n-1}, t_n) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Asimptotik olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(t_{n-1}, t_n) = 1$$

bulunur.